3. DOĞRUSAL PROGRAMLAMA İLE MODELLEME

Two Mines örneği incelenirse, bir matematiksel modelin bir "Doğrusal Program" (DP; linear program - LP) olması için aşağıdaki koşulları sağlaması gerektiği görülür:

- Tüm değişkenler süreklidir (continuous)
- Tek bir amaç vardır (enbüyükleme (maximize) veya enküçükleme (minimize))
- Amaç ve kısıt fonksiyonları doğrusaldır. Fonksiyondaki her terim ya sabit sayıdır ya da bir sabitle çarpılmış değişkendir

DP'ler önemlidir çünkü:

- çok sayıda sorun DP olarak formüle edilebilir
- "Simpleks algoritması" kullanılarak DP'ler çözülebilir ve en iyi çözüm bulunabilir

DP'lerin temel uygulama alanlarına aşağıda çeşitli örnekler verilmiştir:

- Üretim planlama
- Rafineri yönetimi
- Karışım
- Dağıtım
- Finansal ve ekonomik planlama
- İşgücü planlaması
- Tarımsal planlama
- Gıda planlama

DP'ler için dört temel varsayım söz konusudur:

- Oransallık
    - Her karar değişkeninin amaç fonksiyonuna katkısı karar değişkeninin değeri ile orantılıdır (Dört asker üretmenin amaç fonksiyonuna (kâra) katkısı ($4\times\$3=\$12$) bir askerin amaç fonkisyonuna katkısının ($3) tam olarak dört katıdır.)
    - Her karar değişkeninin kısıtların sol tarafına katkısı karar değişkeninin değeri ile orantılıdır. (Üç asker üretmek gerekli cilalama zamanı (2 saat $\times$ 3 = 6 saat) tam olarak bir asker üretmek için gerekli cilalama zamanının (2 saat) üç katıdır.)
- Toplanabilirlik
    - Herhangi bir karar değişkeninin amaç fonksiyonuna katkısı diğer karar değişkenlerinin değerlerinden bağımsızdır. (Trenin (x_2) değeri ne olursa olsun, asker (x_1) üretmek her zaman amaç fonksiyonuna $3x_1$ dolar katkı yapacaktır.)

- Herhangi bir karar değişkeninin kısıt sol tarafına katkısı diğer karar değişkenlerinin değerlerinden bağımsızdır. (x_1'in değeri ne olursa olsun, x_2 üretimi x_2 saat cilalama ve x_2 saat marangozluk gerektirir.)

  Sonuç 1: Amaç fonksiyonu değeri her bir karar değişkeninin katkısının toplamına eşittir.

  Sonuç 2: Her bir kısıdın sol taraf değeri her bir karar değişkeninin katkısının toplamına eşittir.

- Bölünebilirlik

Karar değişkenleri tam sayı olmayan değerler alabilir. Eğer tam sayı değerler kullanmak şartsa TP kullanılmalıdır. (1.69 tren üretmek kabul edilebilir.)

- Kesinlik

Her parametre kesin olarak bilinmektedir.

3.1 DP ÖRNEKLERİ

3.1.1 Giapetto Örneği

(Winston 3.1., s. 49)

Giapetto tahtadan oyuncak asker ve tren yapmaktadır. Satış fiyatları, bir oyuncak asker için $27, bir oyuncak tren için $21'dır. Bir asker için $10'lık hammadde ve $14'lık işçilik kullanılmaktadır. Bir tren için ise söz konusu rakamlar sırasıyla $9 ve $10'dır. Her bir asker için 2 saat cilalama ve 1 saat marangozluk gerekirken, her bir tren için 1 saat cilalama ve 1 saat marangozluk gerekmektedir. Eldeki hammadde miktarı sınırsızdır, fakat haftada en çok 100 saat cilalama ve 80 saat marangozluk kullanabilen Giapetto'nun haftada en fazla 40 oyuncak asker satabileceğini göz önünde bulundurarak karını enbüyüklemek için hangi oyuncaktan haftada kaç adet üretmesi gerektiğini bulunuz.

Yanıt

Karar değişkenleri tam olarak verilmesi gereken (bu sorunda Giapetto tarafından) kararları tanımlamalıdır. Giapetto bir haftada kaç oyuncak asker ve tren yapacağına karar vermelidir. Bu karara göre aşağıdaki karar değişkenleri tanımlanabilir:

x_1 = bir haftada üretilen asker sayısı

x_2 = bir haftada üretilen tren sayısı

Amaç fonksiyonu karar değişkenlerinin bir fonksiyonudur. Gelir veya karını enbüyüklemek ya da maliyetini enküçüklemek isteyen karar vericinin amacını yansıtır. Giapetto haftalık karını (z) enbüyüklemek isteyecektir.

Bu sorunda kar

(haftalık gelir) – (hammadde satınalma maliyeti) – (diğer değişken maliyetler)

olarak formüle edilebilir. Bu durumda Giapetto'nun amaç fonksiyonu:

Enbüyükle $z = 3x_1 + 2x_2$

Kısıtlar karar değişkenlerinin alabileceği değerler üzerindeki, sınırlamaları gösterir. Herhangi bir sınırlama olmazsa Giapetto çok fazla sayıda oyuncak üreterek çok büyük kar elde edebilir. Fakat gerçek hayatta olduğu gibi burada da kısıtlar vardır

Haftalık kullanılabilen cilalama zamanı

Haftalık kullanılabilen marangozluk zamanı

Askerler için haftalık talep

İşaret sınırlamaları da eğer karar değişkenleri salt negatif olmayan değerler alıyorsa kullanılmalıdır (Giapetto negatif sayıda asker veya tren üretemez!).

Yukarıdaki tüm bu özellikler aşağıdaki ***Doğrusal Programlama*** (DP; Linear Programming - LP) modelini verir:

Maks $z = 3x_1 + 2x_2$		(Amaç fonksiyonu)
s.t.	$2x_1 + x_2 \leq 100$	(Cilalama kısıdı)
	$x_1 + x_2 \leq 80$	(Marangozluk kısıdı)
	$x_1 \leq 40$	(Talep kısıdı)
	$x_1, x_2 \geq 0$	(İşaret sınırlamaları)

Eğer (x_1,x_2)'nin bir değeri (bir çözüm) tüm bu kısıtları ve işaret sınırlamalarını sağlarsa, söz konusu çözüm ***olurlu bölge***dedir (feasible region).

Grafik olarak ya da hesaplayarak sorun çözüldüğünde olurlu bölgedeki çözümlerden amaç fonksiyon değeri en yüksek olan çözümün $(x_1,x_2) = (20,60)$ olduğunu ve z=180 değerini verdiğini buluruz. Bu çözüm ***en iyi çözüm***dür (optimal solution).

Rapor

Haftada 20 asker ve 60 tren üretilmesi durumunda kar $180 olacaktır. Kar miktarları, eldeki işçilik ve talebe göre elde edilebilecek en büyük kar budur. Daha fazla işçilik bulunursa kar çoğalabilir.

3.1.2 Reklam Örneği

(Winston 3.2, s. 61)

Dorian şirketi, yüksek gelirli müşterileri için otomobil ve jeep üretmektedir. Televizyondaki tiyatro oyunlarına ve futbol maçlarına bir dakikalık spot reklamlar vererek satışlarını arttırmayı hedeflemektedir. Tiyatro oyununa verilen reklamın maliyeti $50bin'dir ve hedef kitledeki 7 milyon kadın ve 2 milyon erkek tarafından seyredilebilir. Futbol maçına verilen reklamın maliyeti ise $100bin'dir ve hedef kitledeki 2 milyon kadın ve 12 milyon erkek tarafından seyredilebilir. Dorian yüksek gelirli 28 milyon kadın ve 24 milyon erkeğe en az maliyetle nasıl ulaşır?

Yanıt

Karar değişkenleri aşağıdaki gibi belirlenebilir:

x_1 = tiyatro oyununa verilen reklam sayısı

x_2 = futbol maçına verilen reklam sayısı

Sorunun modeli:

$$\begin{aligned} \min\ z &= 50x_1 + 100x_2 \\ \text{öyle ki}\quad 7x_1 &+ 2x_2 \geq 28 \\ 2x_1 &+ 12x_2 \geq 24 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

Grafik çözüm yapılırsa (x_1,x_2) = (3.6,1.4) değerleri için amaç fonksiyonunun en iyi değeri z = 320 olarak bulunur.

Grafiğe bakılarak en iyi tamsayılı çözüm (x_1,x_2) = (4, 2) olarak bulunabilir.

Rapor

Hedeflenen kitleye ulaşmak için en az maliyetli çözüm 4 adet reklamı tiyatro oyununda ve 2 adet reklamı futbol maçında kullanmak gerekir. Bu durumda Dorian $400bin reklam masrafı yapacaktır.

3.1.3 Beslenme Örneği

(Winston 3.4., s. 70)

Bayan Fidan dört "temel gıda grubu" ile beslenmektedir: kek, çikolatalı dondurma, kola, ananaslı pasta. Bir adet kek $0.5'a, bir kaşık dondurma $0.2'a, bir şişe kola $0.3'a ve bir dilim pasta $0.8'a satılmaktadır. Her gün en az 500 kalori, 6 oz. çikolata, 10 oz. şeker ve 8 oz. yağ alması gereken Bayan Fidan en az maliyetle bu gereksinimlerini nasıl karşılar? Aşağıdaki tabloyu kullanarak bir DP modeli kurup sorunu çözünüz.

	Kalori	Çikolata (ounce)	Şeker (ounce)	Yağ (ounce)
Kek (1 adet)	400	3	2	2
Çikolatalı dondurma (1 kaşık)	200	2	2	4
Kola (1 şişe)	150	0	4	1
Ananaslı pasta (1 dilim)	500	0	4	5

Yanıt

Karar değişkenleri:

x_1: günlük yenilecek kek sayısı

x_2: günlük yenilecek kaşık dondurma sayısı

x_3: günlük içilecek şişe kola sayısı

x_4: günlük yenilecek dilim pasta sayısı

şeklinde belirlenebilir.

Bu durumda amaç fonksiyonu (cent cinsinden toplam günlük maliyet):

$$\min w = 50\,x_1 + 20\,x_2 + 30\,x_3 + 80\,x_4$$

Kısıtlar:

$$400\,x_1 + 200\,x_2 + 150\,x_3 + 500\,x_4 \geq 500 \quad \text{(günlük kalori)}$$

$$3\,x_1 + 2\,x_2 \geq 6 \quad \text{(günlük çikolata)}$$

$$2\,x_1 + 2\,x_2 + 4\,x_3 + 4\,x_4 \geq 10 \quad \text{(günlük şeker)}$$

$$2\,x_1 + 4\,x_2 + x_3 + 5\,x_4 \geq 8 \quad \text{(günlük yağ)}$$

$$x_i \geq 0,\ i = 1, 2, 3, 4 \quad \text{(işaret sınırlamaları!)}$$

Rapor

Bayan Fidan günde 3 kaşık dondurma yiyip 1 şişe kola içerek tüm besin gereksinimlerini karşılayabilir ve sadece 90 cent harcar (w=90, x_2=3, x_3=1).

3.1.4 Postane Örneği

(Winston 3.5., s. 74)

Bir postanede haftanın her günü farklı sayıda elemana gereksinim duymaktadır. Sendika kurallarına göre bir eleman 5 gün peş peşe çalışmakta diğer iki gün izin yapmaktadır. Çalıştırılması gereken toplam en az eleman sayısını aşağıdaki iş yüküne göre hesaplayınız.

	Pzt	Sal	Çar	Per	Cum	Cmt	Paz
Gerekli eleman	17	13	15	19	14	16	11

Yanıt

Karar değişkenleri x_i (i. gün çalışmaya başlayan eleman sayısı) olsun

Matematiksel olarak DP modeli aşağıdaki gibi oluşturulabilir:

$$
\begin{array}{llllllllll}
\min z = & x_1 & +x_2 & +x_3 & +x_4 & +x_5 & +x_6 & +x_7 & & \\
& x_1 & & & +x_4 & +x_5 & +x_6 & +x_7 & \geq & 17 \\
& x_1 & +x_2 & & & +x_5 & +x_6 & +x_7 & \geq & 13 \\
& x_1 & +x_2 & +x_3 & & & +x_6 & +x_7 & \geq & 15 \\
& x_1 & +x_2 & +x_3 & +x_4 & & & +x_7 & \geq & 19 \\
& x_1 & +x_2 & +x_3 & +x_4 & +x_5 & & & \geq & 14 \\
& & +x_2 & +x_3 & +x_4 & +x_5 & +x_6 & & \geq & 16 \\
& & & +x_3 & +x_4 & +x_5 & +x_6 & +x_7 & \geq & 11
\end{array}
$$

$x_t \geq 0, \forall t$

Rapor

(x_t) = (4/3,10/3,2,22/3,0,10/3,5), z = 67/3 şeklindedir.

Karar değişkeni değerleri yakın tamsayılara yuvarlanırsa (x_t) = (2,4,2,8,0,4,5), z=25 çözümü bulunur (yanlış olabilir!).

Elde edilen Tamsayılı Lindo çözümüne göre ise amaç fonksiyonun en iyi değeri z=23'dür ve (x_t) = (4,4,2,6,0,4,3) şeklindedir.

3.1.5 Sailco Örneği

(Winston 3.10., s. 99)

Sailco şirketi gelecek dört mevsimde kaç adet yelkenli üreteceğine karar verecektir. Talep sırasıyla 40, 60, 75 ve 25 yelkenlidir. Sailco tüm talepleri zamanında karşılamalıdır. Başlangıçta Sailco'nun envanterinde 10 yelkenli vardır. Normal mesai ile bir mevsimde 40 yelkenli üretebilen şirket yelkenli başına $400 işçilik maliyetine maruz kalmaktadır. Fazla mesai ile yapılan her ek yelkenli için ise işçilik maliyeti $450'dır. Herhangi bir mevsimde yapılan yelkenli ya talebi karşılamak için kullanılıp satılır ya da envantere konulur. Bir yelkenlinin bir mevsim envanterde tutulması durumunda ise $20 envanter taşıma maliyeti oluşmaktadır.

Yanıt

t = 1,2,3,4 için karar değişkenleri

x_t = t. mevsimde normal mesai ile üretilen yelkenli sayısı

y_t = t. mevsimde fazla mesai ile üretilen yelkenli sayısı

Envanter hesaplarının yapılabilmesi için kullanılacak değişkenler:

i_t = t. mevsimin sonunda envanterdeki yelkenli sayısı

d_t = t. dönem için yelkenli talebi

Veri $x_t \leq 40, \forall t$

Mantıksal olarak $i_t = i_{t-1} + x_t + y_t - d_t,\ \forall t.$

Talep karşılanmalı $i_t \geq 0,\ \forall t$

(İşaret sınırlamaları $x_t, y_t \geq 0,\ \forall t$)

Bu kısıt kümelerini kullanarak toplam maliyet z'yi enküçüklemeliyiz:

$$z = 400(x_1+x_2+x_3+x_4) + 450(y_1+y_2+y_3+y_4) + 20(i_1+i_2+i_3+i_4)$$

Rapor

Lindo en iyi çözümü $(x_1, x_2, x_3, x_4) = (40, 40, 40, 25)$, $(y_1, y_2, y_3, y_4) = (0, 10, 35, 0)$ ve toplam maliyet = $78450.00 olarak verir. Üretim çizelgesi:

		M1	**M2**	**M3**	**M4**
Normal mesai (x_t)		40	40	40	25
Fazla mesai (y_t)		0	10	35	0
Envanter (i_t)	10	10	0	0	0
Talep (d_t)		40	60	75	25

3.1.6 Müşteri Hizmet Düzeyi Örneği

(Winston 3.12, s. 108)

Bir bilgisayar şirketinde müşteri hizmetleri için deneyimli uzmana olan talep (adamsaat/ay) aşağıdaki gibidir:

t	**Ocak**	**Şubat**	**Mart**	**Nisan**	**Mayıs**
d_t	6000	7000	8000	9500	11000

Ocak ayı başında şirkette 50 deneyimli uzman vardır. Her uzman ayda 160 saat çalışabilir. Yeni bir uzmanı yetiştirmek için deneyimli uzmanlar 50 saat ayırmaktadır ve söz konusu uzmanın eğitimi bir ayda tamamlanmaktadır. Her deneyimli uzmana ayda $2000, her yeni uzmana ise ayda $1000 ödenmektedir. Her ay deneyimli uzmanların %5'i işten ayrılmaktadır. Şirket hem hizmet talebini karşılamak istemekte hem de maliyetleri enazlamak istemektedir. Sorunu çözmek için DP modeli kurunuz.

Yanıt

Karar değişkenleri:

x_t = t ayında eğitilecek uzman sayısı

İşlem yapabilmek için kullanılan diğer değişkenler ise

y_t = t. ayın başında şirketteki deneyimli uzman sayısı

d_t = t. ayın hizmet talebi

Bu durumda

$$\min z = 2000(y_1+\ldots+y_5)+1000(x_1+\ldots+x_5)$$

öyle ki

$160y_t - 50x_t \geq d_t$ $\quad t = 1,...5$ için,

$y_1 = 50$

$y_t = .95y_{t-1} + x_{t-1}$ $\quad t = 2,3,4,5$ için.

$x_t, y_t \geq 0$

3.1.7 Petrol Karışımı Örneği

(Winston 3.8'den esinlenilmiştir)

Sunco oktan dereceleri ve sülfür oranları farklı üç tip ham petrolün (H1, H2, H3) karıştırılması ile üç tip benzin (B1, B2, B3) üretmektedir. Benzinlerin oktan dereceleri ve sülfür oranları belli standartları sağlamalıdır:

- B1 için ortalama oktan derecesi en az 10, sülfür oranı en fazla %2 olmalıdır,
- B2 için ortalama oktan derecesi en az 8, sülfür oranı en fazla %4 olmalıdır,
- B3 için ortalama oktan derecesi en az 6, sülfür oranı en fazla %3 olmalıdır.

Firmanın her benzin tipi için en fazla satabileceği talepler sırasıyla 3000, 2000 ve 1000 varildir. Bununla birlikte firma reklam yaparak talebini arttırabilmektedir. Herhangi bir benzinde 1 dolarlık reklam, talebi 10 varil arttırmaktadır. Hammaddelerin oktan dereceleri, sülfür oranları ve alış fiyatları ile benzinlerin satış fiyatları aşağıda verilen tablolardaki gibi ise Sunco'nun kârını enbüyükleyecek DP'yi kurunuz.

Ham petrol	Oktan	Sülfür (%)	Alış fiyatı ($/varil)
1	12	1	45
2	6	3	35
3	8	5	25

Benzin	Satış fiyatı ($/varil)
1	70
2	60
3	50

Yanıt

Karar değişkenleri

x_{ij} : *i*. hammaddeden *j*. benzine konulan miktar (varil), $i = 1,2,3$; $j=1,2,3$.

r_j : *j*. benzin için yapılan reklam ($), $j=1,2,3$.

Amaç fonksiyonu (karı enbüyüklemek)

Maks Z = Kar = gelir – maliyet

Maks Z = $(70\sum_i x_{i1} + 60\sum_i x_{i2} + 50\sum_i x_{i3}) - \left(45\sum_j x_{1j} + 35\sum_j x_{2j} + 25\sum_j x_{3j}\right) - \sum_j r_j$

Kısıtlar

Oktan derecesi

$12x_{11} + 6x_{21} + 8x_{31} \geq 10\,(x_{11} + x_{21} + x_{31})$ benzin 1 oktan derecesi

$12x_{12} + 6x_{22} + 8x_{32} \geq 8(x_{12} + x_{22} + x_{32})$ benzin 2 oktan derecesi

$12x_{13} + 6x_{23} + 8x_{33} \geq 6\ (x_{13} + x_{23} + x_{33})$ benzin 3 oktan derecesi

Sülfür oranları

$(.01x_{11} + .03x_{21} + .05x_{31})/(x_{11} + x_{21} + x_{31}) \leq .02$ →

$x_{11} + 3x_{21} + 5x_{31} \leq 2\ (x_{11} + x_{21} + x_{31})$ benzin 1 sülfür oranı

$x_{12} + 3x_{22} + 5x_{32} \leq 4\ (x_{12} + x_{22} + x_{32})$ benzin 2 sülfür oranı

$x_{13} + 3x_{23} + 5x_{33} \leq 2\ (x_{13} + x_{23} + x_{33})$ benzin 3 sülfür oranı

Talepler

$\sum_i x_{ij} \leq T_j + 10r_j \quad \forall j.$ (T_j : *j*. benzinin reklamsız talebi)

İşaret sınırlamaları

x_{ij} , $r_j \geq 0$, $\forall i,j$.

3.2 MUTLAK DEĞERLİ İFADELERİN DP'YE EKLENMESİ

3.2.1 Dönüşüm

Bir modelde bir fonksiyonun mutlak değeri kullanılıyorsa, bu doğrusal olmayan bir yapı oluşturur. Bir $f(x_1, x_2,\ldots, x_n)$ fonksiyonun mutlak değerini $|f(x_1, x_2,\ldots, x_n)|$, DP'ye ekleyebilmek için bir yapay değişken (λ) tanımlayarak modele aşağıdaki kısıtlar eklenir:

$\lambda \geq f(x_1, x_2,\ldots, x_n)$

$\lambda \geq -f(x_1, x_2,\ldots, x_n)$

Modelde amaç fonksiyonu ve/veya kısıtlarda $|f(x_1, x_2,\ldots, x_n)|$ yerine λ yazılır. Bu şekilde bir modellemenin çalışabilmesi için modelin λ'yı küçükleme eğiminde olası gerekir. Aksi taktirde yukarıdaki ifadeler ile λ üstten sınırlandırmadığı için istenen mutlak değer hesabı yapılamaz.

Benzer yaklaşım Min-Maks ve Maks-Min ifadelerinin DP'ye eklenmesinde de kullanılabilir. { Min (Maks $[f_1(\boldsymbol{x}), f_2(\boldsymbol{x}),\ldots, f_k(\boldsymbol{x})]$) } ifadesini DP'ye eklemek için bir yapay değişken (λ) tanımlanarak modele aşağıdaki kısıtlar eklenir:

$\lambda \geq f_1(\boldsymbol{x}),\ \lambda \geq f_2(\boldsymbol{x}),\ \ldots,\ \lambda \geq f_k(\boldsymbol{x})$

{ Maks (Min $[f_1(\boldsymbol{x}), f_2(\boldsymbol{x}),\ldots, f_k(\boldsymbol{x})]$) } ifadesini DP'ye eklemek için bir yapay değişken (λ) tanımlanarak modele aşağıdaki kısıtlar eklenir:

$\lambda \leq f_1(\boldsymbol{x}),\ \lambda \leq f_2(\boldsymbol{x}),\ \ldots,\ \lambda \leq f_k(\boldsymbol{x})$

3.2.2 Makine Yeri Belirleme Örneği

(Bazaraa, 2010; s.30.)

Dört makine bulunan bir üretim alanına yeni bir makinenin koyulacağı yer belirlenmek istenmektedir. Mevcut makinelerin koordinatları şöyledir. $\binom{3}{1}, \binom{0}{-3}, \binom{-2}{2}, \binom{1}{4}$. Yeni makinenin koordinatları: $\binom{x_1}{x_2}$ olacaktır. Yeni makine ile diğer makineler arasındaki mesafeyi en küçükleyecek koordinatı bulmak için bir DP kurunuz. Makineler arası mesafeyi Manhattan uzaklığı ile belirlenecektir. Örnek: $\binom{x_1}{x_2}$ ile $\binom{3}{1}$ arasındaki mesafe: $|x_1 - 3| + |x_2 - 1|$.

Yanıt

Karar değişkenleri

x_1 ve x_2, yeni makinenin koordinatları

λ_{ij} : yeni makine ile *i*. mevcut makine arasındaki *j*. koordinata göre mesafesi, i = 1,2,3,4; j = 1,2.

Amaç fonksiyonu

Min $\sum_{i=1}^{4} \sum_{j=1}^{2} \lambda_{ij}$

Kısıtlar (*Uzaklık hesaplama)*

$\lambda_{ij} \geq k_{ij} - x_j, \quad \lambda_{ij} \geq -k_{ij} + x_j \quad \forall i, j.$ k_{ij}: *i*. makinenin *j*. koordinatı

Örneğin; i =1 ve j=1,2 için;

$\lambda_{11} \geq 3 - x_1$ $\quad \lambda_{11} \geq -3 + x_1$

$\lambda_{12} \geq 1 - x_2$ $\quad \lambda_{12} \geq -1 + x_2$

İşaret sınırlamaları

x_1, x_2 serbest; $\lambda_{ij} \geq 0$, $\forall i,j$.